Písemná zkouška z Matematiky II pro FSV (A)
LS 2018/2019

Úloha 1 (10 bodů)**.** Určete a nakreslete definiční obor a vyšetřete parciální derivace funkce

$$f(x,y) = e^{\sqrt{x+1}}\sqrt{x+y^2}.$$

Úloha 2 (10 bodů)**.** Ukažte, že rovnice

$$e^{xy} + xyz = e + 1$$

určuje v jistém okolí bodu $[1,1,1]$ jednoznačně funkci $x = x(y,z)$ proměnných y,z splňující $x(1,1) = 1$. Napište rovnici tečné roviny ke grafu funkce $x(y,z)$ v bodě $[1,1,1]$. Spočtěte $\frac{\partial^2 x}{\partial y \partial z}(1,1)$.

Úloha 3 (10 bodů)**.** Nalezněte supremum a infimum funkce f na množině M a určete, zda a případně kde se jich nabývá:

$$f(x,y,z) = 2x - y + z, \quad M = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3;\ x^2+y^2+z^2 \le 1,\ x^2+(y+1)^2+z^2 \le 1\}.$$

Úloha 4 (10 bodů)**.** Určete hodnost matice $\mathrm{A}(p)$ v závislosti na parametru $p \in \mathbb{R}$.

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & p+3 & 2p \\ 2 & 4 & -1 & 2p+6 & 2p-14 \\ 1 & 2 & 0 & 5 & 2p-7 \\ 2 & 4 & -1 & 10-2p & 4p-14 \\ 1 & 2 & 0 & 2p+3 & p-7 \end{pmatrix}$$

Úloha 5 (10 bodů)**.** V závislosti na parametru $p \in \mathbb{R}$, $p \ge 0$ vyšetřete konvergenci a absolutní konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \log\left(\cos\left(\sqrt{n^p+1} - \sqrt{n^p-1}\right)\right).$$

Řešení

Úloha 1.

$$D_f = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2;\ x \ge \max\{-1,-y^2\}\},$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = e^{\sqrt{x+1}}\left(\frac{1}{2\sqrt{x+y^2}} + \frac{\sqrt{x+y^2}}{2\sqrt{x+1}}\right): \quad x > \max\{-1,-y^2\},$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = e^{\sqrt{x+1}}\frac{y}{\sqrt{x+y^2}}: \quad x > \max\{-1,-y^2\} \vee (x = -1 \wedge |y| > 1),$$

$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ neexistuje, jinde parciální derivace nemají smysl.

Úloha 2. Rovnice tečné nadroviny je $T(y,z) = -y + 2 - \frac{z-1}{e+1}$ a $\frac{\partial^2 x}{\partial y \partial z}(1,1) = \frac{1}{e+1}$.

Úloha 3. Funkce f nabývá maxima $\frac{1}{2}(1+\sqrt{15})$ na množině M v bodě $\left[\sqrt{\frac{3}{5}}, -\frac{1}{2}, \sqrt{\frac{3}{20}}\right]$ a minima $\frac{1}{2}(1-\sqrt{15})$ v bodě $\left[\sqrt{-\frac{3}{5}}, -\frac{1}{2}, -\sqrt{\frac{3}{20}}\right]$.

Úloha 4.

$$h(\mathrm{A}(p)) = \begin{cases} 4: & p \notin \{0,1\} \\ 3: & p \in \{0,1\}. \end{cases}$$

Úloha 5. Pro $p = 0$ řada diverguje, pro $0 < p \le 1$ řada konverguje neabsolutně a pro $p > 1$ řada konverguje absolutně.

Písemná zkouška z Matematiky II pro FSV (B)
LS 2018/2019

Úloha 1 (10 bodů)**.** Určete a nakreslete definiční obor a vyšetřete parciální derivace funkce

$$f(x,y) = (x-2y)^{|2x-y|}.$$

Úloha 2 (10 bodů)**.** Ukažte, že rovnice

$$\log(x+xy) = y\cos(x+y)$$

určuje v jistém okolí bodu $[1,0]$ jednoznačně funkce $x = x(y)$ a $y = y(x)$ splňující $x(0) = 1$ a $y(1) = 0$. Lze něco říci o monotonii funkce $x(y)$? Spočtěte $y'(1)$.

Úloha 3 (10 bodů)**.** Nalezněte supremum a infimum funkce f na množině M a určete, zda a případně kde se jich nabývá:

$$f(x,y) = (2x^2+3y^2)e^{-3x^2-y^2}, \quad M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2;\ x \geq 0,\ y \geq 0\}.$$

Úloha 4 (10 bodů)**.** Spočtěte $\det \mathrm{A}^{-1}$.

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & -2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Úloha 5 (10 bodů)**.** V závislosti na parametru $p \in < 0,6 >$ vyšetřete konvergenci a absolutní konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(n^p\left(\sqrt[3]{n^p+1} - \sqrt[3]{n^p + \cos\left(\frac{1}{n}\right)}\right)\right).$$

Řešení

Úloha 1.

$$\begin{aligned}
D_f &= \{[x,y] \in \mathbb{R}^2;\ x > 2y\}, \\
\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= (x-2y)^{|2x-y|}\left(\frac{|2x-y|}{x-2y} + \log(x-2y)2\operatorname{sign}(2x-y)\right): \quad y \neq 2x, \\
\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= (x-2y)^{|2x-y|}\left(-2\frac{|2x-y|}{x-2y} - \log(x-2y)\operatorname{sign}(2x-y)\right): \quad y \neq 2x, \\
\frac{\partial f}{\partial x}\left(-\frac{1}{3},-\frac{2}{3}\right) &= 0, \\
\frac{\partial f}{\partial y}\left(-\frac{1}{3},-\frac{2}{3}\right) &= 0,
\end{aligned}$$

$\frac{\partial f}{\partial x}(x,2x)$ a $\frac{\partial f}{\partial y}(x,2x)$ neexistují pro $x \neq -\frac{1}{3}$.

Úloha 2. Funkce $x(y)$ je klesající na nějakém okolí bodu 0 a $y'(1) = \frac{1}{\cos(1)-1}$.

Úloha 3. Funkce f nabývá maxima $3e^{-1}$ na množině M v bodě $\left[0,1\right]$ a minima 0 v bodě $\left[0,0\right]$.

Úloha 4. $\frac{1}{4}$.

Úloha 5. Pro $p \in < 3,6 >$ řada diverguje a pro $p \in < 0,3)$ řada konverguje absolutně.

Písemná zkouška z Matematiky II pro FSV (C)
LS 2018/2019

Úloha 1 (10 bodů). Určete a nakreslete definiční obor a vyšetřete parciální derivace funkce

$$f(x,y) = \sin\left(\left|x^2+y^2-1\right|\right).$$

Úloha 2 (10 bodů). Ukažte, že soustava rovnic

$$\begin{aligned} 5xy + 3zw &= 4y^2zw + 4x^2z, \\ 4x^3yw + z^2y &= 5xzw \end{aligned}$$

určuje v jistém okolí bodu $[1,1,1,1]$ jednoznačně funkce $x = x(y,w)$ a $z = z(y,w)$ splňující $x(1,1) = 1$, $z(1,1) = 1$. Nalezněte tečnou nadrovinu ke grafu funkce z v bodě $[1,1,1]$.

Úloha 3 (10 bodů). Nalezněte supremum a infimum funkce f na množině M a určete, zda a případně kde se jich nabývá:

$$f(x,y,z) = 2x + y + 3z, \quad M = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3;\ x^2+y^2+z^2 \le 4,\ x+y+z \ge 0\}.$$

Úloha 4 (10 bodů). Spočtěte $\det \mathrm{A}^2\mathrm{B}^{-1}\mathrm{A}^T$.

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & 1 & 5 \\ -4 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{B} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Úloha 5 (10 bodů). V závislosti na parametru $x \in \mathbb{R}$ vyšetřete konvergenci a absolutní konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^{n+1} \frac{n}{4^n n^2 + (-5)^n n + 6n^3}.$$

Řešení

Úloha 1.

$$\begin{aligned} D_f &= \mathbb{R}^2, \\ \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= \cos\left(\left|x^2+y^2-1\right|\right) \operatorname{sign}\left(x^2+y^2-1\right) 2x: \quad x^2+y^2 \ne 1, \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= \cos\left(\left|x^2+y^2-1\right|\right) \operatorname{sign}\left(x^2+y^2-1\right) 2y: \quad x^2+y^2 \ne 1, \\ \frac{\partial f}{\partial x}(0,\pm 1) &= 0, \\ \frac{\partial f}{\partial y}(\pm 1, 0) &= 0, \end{aligned}$$

jinde parciální derivace neexistují.

Úloha 2. Rovnice tečné nadroviny je $T(y,w) = 1 - \frac{3}{22}(y-1) + \frac{1}{22}(w-1)$.

Úloha 3. Funkce f nabývá maxima $2\sqrt{14}$ na množině M v bodě $\sqrt{\frac{2}{7}}[2,1,3]$ a minima $-2\sqrt{2}$ v bodě $\sqrt{2}[0,1,-1]$.

Úloha 4. $\frac{27}{10}$

Úloha 5. Pro $|x| \ge 5$ řada diverguje a pro $|x| < 5$ řada konverguje absolutně.

Písemná zkouška z Matematiky II pro FSV (D)
LS 2018/2019

Úloha 1 (10 bodů). Určete a nakreslete definiční obor a vyšetřete parciální derivace funkce

$$f(x,y) = \max\{y - \cos(x), 0\}.$$

Úloha 2 (10 bodů). Ukažte, že rovnice

$$xe^{x+y} + 1 = \sin(xy) + y$$

určuje v jistém okolí bodu $[0,1]$ jednoznačně funkci $x = x(y)$ proměnné y splňující $x(1) = 0$. Lze něco říci o monotonii funkce $x(y)$? Spočtěte $x'(1)$ a $x''(1)$.

Úloha 3 (10 bodů). Nalezněte supremum a infimum funkce f na množině M a určete, zda a případně kde se jich nabývá:

$$f(x,y) = 2x^2 - 4xy + 5x - 3y + y^2, \quad M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2;\ x - y \geq 0,\ x + y \leq 2,\ y \geq 0\}.$$

Úloha 4 (10 bodů). Vyřešte soustavy rovnic $\mathbb{A}\boldsymbol{x_i} = \boldsymbol{b_i}$, $i = 1,2,3$, kde

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -2 \\ -2 & 3 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & -1 & 2 \\ -3 & 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{b_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{b_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{b_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Úloha 5 (10 bodů). V závislosti na parametru $p \in \mathbb{R}$, $p \geq 0$ vyšetřete konvergenci a absolutní konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\frac{p}{2}} \frac{\sqrt[3]{n^p + n^2} - \sqrt[3]{n^p + 1}}{n^2}.$$

Řešení

Úloha 1.

$$\begin{aligned} D_f &= \mathbb{R}^2, \\ \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= \sin(x): \quad y > \cos(x), \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= 1: \quad y > \cos(x), \\ \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= 0: \quad y < \cos(x), \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= 0: \quad y < \cos(x), \\ \frac{\partial f}{\partial x}(x,\cos(x)) &= 0: \quad x \in \{k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\}. \end{aligned}$$

V ostatních bodech parciální derivace neexistují.

Úloha 2. Existuje okolí bodu 1 na němž je funkce $x(y)$ rostoucí, $x'(1) = \frac{1}{e-1}$ a $x''(1) = -\frac{2e}{(e-1)^3} - \frac{2}{e-1}$.

Úloha 3. Funkce f nabývá maxima 18 na množině M v bodě $[2,0]$ a minima 0 v bodě $[0,0]$.

Úloha 4. Řešení x_1 a x_3 neexisují. Řešení x_2 je libovolný prvek množiny $\left\{\frac{1}{2}[1-t, 3-t, 5t-1, 2t];\ t \in \mathbb{R}\right\}$.

Úloha 5. Pro $p \in \left\langle \frac{2}{3}, 6 \right\rangle$ řada diverguje, pro $p \in \left\langle 0, \frac{2}{3} \right) \cup (6, +\infty)$ řada konverguje absolutně.

Písemná zkouška z Matematiky II pro FSV (E)
LS 2018/2019

Úloha 1 (10 bodů)**.** Určete a nakreslete definiční obor a vyšetřete parciální derivace funkce

$$f(x,y) = \sqrt{\frac{y}{|x|-|y|}}.$$

Úloha 2 (10 bodů)**.** Ukažte, že rovnice

$$\sin(x-y) + x^2yz^2 = 1$$

určuje v jistém okolí bodu $[1,1,1]$ jednoznačně funkci $z = z(x,y)$ proměnných x, y splňující $z(1,1) = 1$. Napište rovnici tečné roviny ke grafu funkce $z(x,y)$ v bodě $[1,1,1]$. Spočtěte $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(1,1)$.

Úloha 3 (10 bodů)**.** Nalezněte supremum a infimum funkce f na množině M a určete, zda a případně kde se jich nabývá:

$$f(x,y,z) = y^2 + xz, \quad M = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3;\ x^2+y^2+z^2 < 1,\ x+z \geq 0\}.$$

Úloha 4 (10 bodů)**.** Nalezněte inverzní matici k matici $\mathbb{A}$ a vyřešte soustavu $\mathbb{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, kde

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 5 \\ 2 & -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Úloha 5 (10 bodů)**.** V závislosti na parametru $x \in \mathbb{R}$ vyšetřete konvergenci a absolutní konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} (x-1)^{n^2} \frac{\sqrt{n+2}}{n+1}.$$

Řešení

Úloha 1.

$$D_f = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2;\ (y \geq 0 \wedge |x| > |y|) \vee (y \leq 0 \wedge |x| < |y|)\},$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -\frac{1}{2}\operatorname{sign}(x)\sqrt{\frac{y}{(|x|-|y|)^3}} : \qquad x \neq 0 \wedge y \neq 0 \wedge [x,y] \in D_f,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{|x|}{2\sqrt{y(|x|-|y|)^3}} : \qquad y \neq 0 \wedge [x,y] \in D_f,$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,0) = 0 : \qquad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\},$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,y) \text{ neexistuje} : \qquad y < 0,$$

jinde parciální derivace nemají smysl.

Úloha 2. Rovnice tečné nadroviny je $T(x,y) = 1 - \frac{3}{2}(x-1)$ a $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(1,1) = \frac{1}{2}$.

Úloha 3. Funkce f nenabývá maxima ani minima na M. Supremum funkce f na množině M je 1 a infimum funkce f na M je $-\frac{1}{2}$.

Úloha 4.

$$\mathbb{A}^{-1} = \begin{pmatrix} -5 & 14 & 6 & -7 \\ \frac{5}{2} & -6 & -\frac{5}{2} & 3 \\ -4 & 11 & 5 & -6 \\ \frac{3}{2} & -4 & -\frac{3}{2} & 2 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 43 \\ -18 \\ 34 \\ -12 \end{pmatrix}.$$

Úloha 5. Pro $x \in (-\infty, 0) \cup < 2, +\infty)$ řada diverguje, pro $x = 0$ řada konverguje neabsolutně a pro $x \in (0,2)$ řada konverguje absolutně.